第七章 微分方程

**教学目的：**

1．了解微分方程及其解、阶、通解，初始条件和特等概念。

2．熟练掌握变量可分离的微分方程及一阶线性微分方程的解法。

3．会解齐次微分方程、伯努利方程和全微分方程，会用简单的变量代换解某些微分方程。

1. 会用降阶法解下列微分方程：， 和
2. 理解线性微分方程解的性质及解的结构定理。

6．掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法，并会解某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程。

7.求自由项为多项式、指数函数、以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程的特解和通解。

教学重点：

1. 可分离的微分方程及一阶线性微分方程的解法
2. 可降阶的高阶微分方程， 和
3. 二阶常系数齐次线性微分方程；
4. 自由项为多项式、指数函数、以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程；

教学难点：

1. 齐次微分方程;
2. 线性微分方程解的性质及解的结构定理；

3、自由项为多项式、指数函数、以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程的特解。

# §12. 1 微分方程的基本概念

几个概念:

微分方程: 表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程, 叫微分方程.

常微分方程: 未知函数是一元函数的微分方程, 叫常微分方程.

偏微分方程: 未知函数是多元函数的微分方程, 叫偏微分方程.

微分方程的阶: 微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数, 叫微分方程的阶.

*x*3 *y*′′′+*x*2 *y*′′−4*xy*′=3*x*2 ,

*y*(4) −4*y*′′′+10*y*′′−12*y*′+5*y*=sin2*x*,

*y*(*n*) +1=0,

一般*n*阶微分方程:

*F*(*x*, *y*, *y*′, ⋅ ⋅ ⋅ , *y*(*n*) )=0.

*y*(*n*)=*f*(*x*, *y*, *y*′, ⋅ ⋅ ⋅ , *y*(*n*−1) ) .

微分方程的解: 满足微分方程的函数(把函数代入微分方程能使该方程成为恒等式)叫做该微分方程的解. 确切地说, 设函数*y*=*ϕ*(*x*)在区间*I*上有*n*阶连续导数, 如果在区间*I*上,

*F*[*x*, *ϕ*(*x*), *ϕ*′(*x*), ⋅ ⋅ ⋅, *ϕ*(*n*) (*x*)]=0,

那么函数*y*=*ϕ*(*x*)就叫做微分方程*F*(*x*, *y*, *y*′, ⋅ ⋅ ⋅, *y*(*n*) )=0在区间*I*上的解.

通解: 如果微分方程的解中含有任意常数, 且任意常数的个数与微分方程的阶数相同, 这样的解叫做微分方程的通解.

初始条件: 用于确定通解中任意常数的条件, 称为初始条件. 如

*x*=*x*0 时, *y*=*y*0 , *y*′= *y*′0 .

一般写成

, .

特解: 确定了通解中的任意常数以后, 就得到微分方程的特解. 即不含任意常数的解.

初值问题: 求微分方程满足初始条件的解的问题称为初值问题.

如求微分方程*y*′=*f*(*x*, *y*)满足初始条件的解的问题, 记为

.

积分曲线: 微分方程的解的图形是一条曲线, 叫做微分方程的积分曲线.

# §12. 2 可分离变量的微分方程

### 

一般地, 如果一阶微分方程*y*′=*ϕ*(*x*, *y*)能写成

*g*(*y*)*dy*=*f*(*x*)*dx*

形式, 则两边积分可得一个不含未知函数的导数的方程

*G*(*y*)=*F*(*x*)+*C*,

由方程*G*(*y*)=*F*(*x*)+*C*所确定的隐函数就是原方程的通解

### 对称形式的一阶微分方程:

一阶微分方程有时也写成如下对称形式:

*P*(*x*, *y*)*dx*+*Q*(*x*, *y*)*dy*=0

在这种方程中, 变量*x*与*y* 是对称的.

若把*x*看作自变量、*y*看作未知函数, 则当*Q*(*x*,*y*)≠0时, 有

.

若把*y*看作自变量、*x*看作未知函数, 则当*P*(*x*,*y*)≠0时, 有

.

### 可分离变量的微分方程:

如果一个一阶微分方程能写成

*g*(*y*)*dy*=*f*(*x*)*dx* (或写成*y*′=*ϕ*(*x*)*ψ*(*y*))

的形式, 就是说, 能把微分方程写成一端只含*y*的函数和*dy*, 另一端只含*x*的函数和*dx*, 那么原方程就称为可分离变量的微分方程.

讨论: 下列方程中哪些是可分离变量的微分方程？

(1) *y*′=2*xy*, 是. ⇒*y*−1*dy*=2*xdx* .

(2)3*x*2+5*x*−*y*′=0, 是. ⇒*dy*=(3*x*2+5*x*)*dx*.

(3)(*x*2+*y*2)*dx*−*xydy*=0, 不是.

(4)*y*′=1+*x*+*y*2+*xy*2, 是. ⇒*y*′=(1+*x*)(1+*y*2).

(5)*y*′=10*x*+*y*, 是. ⇒10−*ydy*=10*xdx*.

(6). 不是.

### 可分离变量的微分方程的解法:

第一步 分离变量, 将方程写成*g*(*y*)*dy* =*f*(*x*)*dx*的形式;

第二步 两端积分:, 设积分后得*G*(*y*)=*F*(*x*)+*C*;

第三步 求出由*G*(*y*)=*F*(*x*)+*C*所确定的隐函数*y*=*Φ*(*x*)或*x*=*Ψ*(*y*)

*G*(*y*)=*F*(*x*)+*C* , *y*=*Φ* (*x*)或*x*=*Ψ*(*y*)都是方程的通解, 其中*G*(*y*)=*F*(*x*)+*C*称为隐式(通)解.

例4 求微分方程的通解.

解 方程可化为

,

分离变量得

,

两边积分得

, 即.

于是原方程的通解为.

# §12. 3 齐次方程(高数A2)

齐次方程:

如果一阶微分方程中的函数*f*(*x*, *y*)可写成

的函数, 即, 则称这方程为齐次方程.

下列方程哪些是齐次方程？

(1)是齐次方程..

(2)不是齐次方程..

(3)(*x*2+*y*2)*dx*−*xydy*=0是齐次方程. .

(4)(2*x*+*y*−4)*dx*+(*x*+*y*−1)*dy*=0不是齐次方程..

(5)是齐次方程.



齐次方程的解法:

在齐次方程中, 令, 即*y*=*ux*, 有

,

分离变量, 得

.

两端积分, 得

.

求出积分后, 再用代替*u*, 便得所给齐次方程的通解.

例1 解方程.

解 原方程可写成

,

因此原方程是齐次方程. 令, 则

*y*=*ux*, ,

于是原方程变为

,

即 .

分离变量, 得

.

两边积分, 得*u*−ln|*u*|+*C*=ln|*x*|,

或写成ln|*xu*|=*u*+*C*.

以代上式中的*u*, 便得所给方程的通解

.

# §12.4 线性微分方程

## 一、 线性方程

线性方程:

方程叫做一阶线性微分方程.

如果*Q*(*x*)≡0 , 则方程称为齐次线性方程, 否则方程称为非齐次线性方程.

方程叫做对应于非齐次线性方程的齐次线性方程.

下列方程各是什么类型方程？

(1)⇒是齐次线性方程.

(2) 3*x*2+5*x*−5*y*′=0⇒*y*′=3*x*2+5*x* , 是非齐次线性方程.

(3) *y*′+*y* cos *x*=*e*−sin *x*, 是非齐次线性方程.

(4), 不是线性方程.

(5)⇒或, 不是线性方程.

齐次线性方程的解法:

齐次线性方程是变量可分离方程. 分离变量后得

,

两边积分, 得

,

或 **,

这就是齐次线性方程的通解（积分中不再加任意常数）.

例1 求方程的通解.

解 这是齐次线性方程, 分离变量得

,

两边积分得

ln|*y*|=ln|*x*−2|+lnC,

方程的通解为

*y*=*C*(*x*−2).

非齐次线性方程的解法:

将齐次线性方程通解中的常数换成*x*的未知函数*u*(*x*), 把

**

设想成非齐次线性方程的通解. 代入非齐次线性方程求得

,

化简得 **,

**,

于是非齐次线性方程的通解为

**,

或 **.

非齐次线性方程的通解等于对应的齐次线性方程通解与非齐次线性方程的一个特解之和.

例2 求方程的通解.

解 这是一个非齐次线性方程.

先求对应的齐次线性方程的通解.

分离变量得

,

两边积分得

ln *y*=2ln (*x*+1)+ln *C*,

齐次线性方程的通解为

*y*=*C*(*x*+1)2.

用常数变易法. 把*C*换成*u*, 即令*y*=*u*⋅(*x*+1)2, 代入所给非齐次线性方程, 得



,

两边积分, 得

.

再把上式代入*y*=*u*(*x*+1)2中, 即得所求方程的通解为

.

解: 这里, .

因为 ,

,

,

所以通解为

**.

**§12. 5 可降阶的高阶微分方程 (A2)**

***一*、*y*(*n*)=*f* (*x*)型的微分方程**

解法: 积分*n* 次

**,

,

⋅ ⋅ ⋅.

例1 求微分方程*y*′′′=*e*2*x*cos *x* 的通解.

解 对所给方程接连积分三次, 得

,

,

,

这就是所给方程的通解.

或 ,

,

,

这就是所给方程的通解.

二、*y*′′= *f*(*x*, *y*′)型的微分方程

解法: 设*y*′=*p*则方程化为

*p*′=*f*(*x*, *p*).

设*p*′=*f*(*x*, *p*)的通解为*p*=**(*x*,*C*1), 则

.

原方程的通解为

**.

例3 求微分方程

(1*x*2)*y*′′=2*xy*′

满足初始条件

*y*|*x*=0=1, *y*′|*x*=0=3

的特解.

解 所给方程是*y*′′=*f*(*x*, *y*′)型的. 设*y*′=*p*, 代入方程并分离变量后, 有

.

两边积分, 得

ln|*p*|=ln(1+*x*2)+*C*,

即 *p*=*y*′=*C*1(1+*x*2) (*C*1=±*eC*).

由条件*y*′|*x*=0=3, 得*C*1=3,

所以 *y*′=3(1+*x*2).

两边再积分, 得 *y*=*x*3+3*x*+*C*2.

又由条件*y*|*x*=0=1, 得*C*2=1,

于是所求的特解为

*y*=*x*3+3*x*+1.

三、*y*′′=*f*(*y*, *y*′)型的微分方程

解法: 设*y*′=*p*,有

.

原方程化为

.

设方程的通解为*y*′=*p*=**(*y*, *C*1), 则原方程的通解为

.

例5 求微分*yy*′′*y*′2=0的通解.

解 设*y*′=*p*, 则,

代入方程, 得

.

在*y*≠0、*p*≠0时, 约去*p*并分离变量, 得

.

两边积分得

ln|*p*|=ln|*y*|+ln*c*,

即 *p*=*Cy*或*y*′=*Cy*(*C*=±*c*).

再分离变量并两边积分, 便得原方程的通解为

ln|*y*|=*Cx*+ln*c*1,

或 *y*=*C*1*eCx*(*C*1=±*c*1).

例5 求微分*yy*′′*y*′2=0的通解.

解 设*y*′=*p*, 则原方程化为

,

当*y*≠0、*p*≠0时, 有

,

于是 ,

即 *y*′*C*1*y*=0,

从而原方程的通解为

.

二阶线性微分方程: 二阶线性微分方程的一般形式为

*y*′′+*P*(*x*)*y*′+*Q*(*x*)*y*=*f*(*x*),

若方程右端*f*(*x*)≡0时, 方程称为齐次的, 否则称为非齐次的.

二、线性微分方程的解的结构

先讨论二阶齐次线性方程

*y*′′+*P*(*x*)*y*′+*Q*(*x*)*y*=0, 即.

定理1 如果函数*y*1(*x*)与*y*2(*x*)是方程

*y*′′+*P*(*x*)*y*′+*Q*(*x*)*y*=0.

的两个解, 那么

*y*=*C*1*y*1(*x*)+*C*2*y*2(*x*)

也是方程的解, 其中*C*1、*C*2是任意常数.

齐次线性方程的这个性质表明它的解符合叠加原理.

函数的线性相关与线性无关:

设*y*1(*x*), *y*2(*x*), ⋅ ⋅ ⋅ , *y*n(*x*)为定义在区间*I*上的*n*个函数. 如果存在*n*个不全为零的常数*k*1, *k*2, ⋅ ⋅ ⋅ , *kn*, 使得当*x*∈*I* 时有恒等式

*k*1*y*1(*x*)+*k*2*y*2(*x*)+ ⋅ ⋅ ⋅ + *k*n*y*n(*x*)≡0

成立, 那么称这*n*个函数在区间*I*上线性相关; 否则称为线性无关.

判别两个函数线性相关性的方法:

对于两个函数, 它们线性相关与否, 只要看它们的比是否为常数, 如果比为常数, 那么它们就线性相关, 否则就线性无关.

例如, 1, cos2*x* , sin2*x* 在整个数轴上是线性相关的. 函数1, *x*, *x*2在任何区间(*a*, *b*)内是线性无关的.

定理2 如果如果函数*y*1(*x*)与*y*2(*x*)是方程

*y*′′+*P*(*x*)*y*′+*Q*(*x*)*y*=0

的两个线性无关的解, 那么

*y*=*C*1*y*1(*x*)+*C*2*y*2(*x*) (*C*1、*C*2是任意常数)

是方程的通解.

推论 如果*y*1(*x*), *y*2(*x*), ⋅ ⋅ ⋅, *yn*(*x*)是方程

*y*(*n*)+*a*1(*x*)*y*(*n*−1)+ ⋅ ⋅ ⋅ +*an*−1(*x*)*y*′+ *an*(*x*)*y*=0

的*n*个线性无关的解, 那么, 此方程的通解为

*y*=*C*1*y*1(*x*)+*C*2*y*2(*x*)+ ⋅ ⋅ ⋅ + *Cnyn*(*x*),

其中*C*1, *C*2, ⋅ ⋅ ⋅, *Cn*为任意常数.

二阶非齐次线性方程解的结构:

我们把方程

*y*′′+*P*(*x*)*y*′+*Q*(*x*)*y*=0

叫做与非齐次方程

*y*′′+*P*(*x*)*y*′+*Q*(*x*)*y*=*f*(*x*)

对应的齐次方程.

定理3 设*y*\*(*x*)是二阶非齐次线性方程

*y*′′+*P*(*x*)*y*′+*Q*(*x*)*y*=*f*(*x*)

的一个特解, *Y*(*x*)是对应的齐次方程的通解, 那么

*y*=*Y*(*x*)+*y*\*(*x*)

是二阶非齐次线性微分方程的通解.

定理4 设非齐次线性微分方程 *y*′′+*P*(*x*)*y*′+*Q*(*x*)*y*=*f*(*x*)的右端*f*(*x*)几个函数之和, 如

*y*′′+*P*(*x*)*y*′+*Q*(*x*)*y*=*f*1(*x*)+ *f*2(*x*),

而*y*1\*(*x*)与*y*2\*(*x*)分别是方程

*y*′′+*P*(*x*)*y*′+*Q*(*x*)*y*=*f*1(*x*)与*y*′′+*P*(*x*)*y*′+*Q*(*x*)*y*=*f*2(*x*)

的特解, 那么*y*1\*(*x*)+*y*2\*(*x*)就是原方程的特解.

# §12.6 二阶常系数齐次线性微分方程

二阶常系数齐次线性微分方程: 方程

*y*′′+*py*′+*qy*=0

称为二阶常系数齐次线性微分方程, 其中*p*、*q*均为常数.

特征方程: 方程*r*2+*pr*+*q*=0叫做微分方程*y*′′+*py*′+*qy*=0的特征方程. 特征方程的两个根*r*1、*r*2可用公式



求出.

特征方程的根与通解的关系:

(1)特征方程有两个不相等的实根*r*1、*r*2时,

方程的通解为

.

(2)特征方程有两个相等的实根*r*1=*r*2时,

.

(3)特征方程有一对共轭复根*r*1, 2=*α*±*iβ*时,

方程的通解为

*y*=*eαx*(*C*1cos*βx*+*C*2sin*βx* ).

求二阶常系数齐次线性微分方程*y*′′+*py*′+*qy*=0的通解的步骤为:

第一步 写出微分方程的特征方程

*r*2+*pr*+*q*=0

第二步 求出特征方程的两个根*r*1、*r*2.

第三步 根据特征方程的两个根的不同情况, 写出微分方程的通解.

例1 求微分方程*y*′′−2*y*′−3*y*=0的通解.

解 所给微分方程的特征方程为

*r*2−2*r*−3=0, 即(*r*+1)(*r*−3)=0.

其根*r*1=−1, *r*2=3是两个不相等的实根, 因此所求通解为

*y*=*C*1*e*−*x*+*C*2*e*3*x*.

例2 求方程*y*′′+2*y*′+*y*=0满足初始条件*y*|*x*=0=4、*y*′|*x*=0=−2的特解.

解 所给方程的特征方程为

*r*2+2*r*+1=0, 即(*r*+1)2=0.

其根*r*1=*r*2=−1是两个相等的实根, 因此所给微分方程的通解为

*y*=(*C*1+*C*2*x*)*e*−*x*.

将条件*y*|*x*=0=4代入通解, 得*C*1=4, 从而

*y*=(4+*C*2*x*)*e*−*x*.

将上式对*x*求导, 得

*y*′=(*C*2−4−*C*2*x*)*e*−*x*.

再把条件*y*′|*x*=0=−2代入上式, 得*C*2=2. 于是所求特解为

*x*=(4+2*x*)*e*−*x*.

例 3 求微分方程*y*′′−2*y*′+5*y*= 0的通解.

解 所给方程的特征方程为

*r*2−2*r*+5=0.

特征方程的根为*r*1=1+2*i*, *r*2=1−2*i*, 是一对共轭复根,

因此所求通解为

*y*=*ex*(*C*1cos2*x*+*C*2sin2*x*).

*n* 阶常系数齐次线性微分方程: 方程

*y*(*n*) +*p*1*y*(*n*−1)+*p*2 *y*(*n*−2) + ⋅ ⋅ ⋅ + *pn*−1*y*′+*pny*=0,

称为*n* 阶常系数齐次线性微分方程, 其中 *p*1, *p*2 , ⋅ ⋅ ⋅ , *pn*−1, *pn*都是常数.

二阶常系数齐次线性微分方程所用的方法以及方程的通解形式, 可推广到*n* 阶常系数齐次线性微分方程上去.

**§12. 7 二阶常系数非齐次线性微分方程**

二阶常系数非齐次线性微分方程: 方程

*y*′′+*py*′+*qy*=*f*(*x*)

称为二阶常系数非齐次线性微分方程, 其中*p*、*q*是常数.

二阶常系数非齐次线性微分方程的通解是对应的齐次方程

的通解*y*=*Y*(*x*)与非齐次方程本身的一个特解*y*=*y*\*(*x*)之和:

*y*=*Y*(*x*)+ *y*\*(*x*).

当*f*(*x*)为两种特殊形式时, 方程的特解的求法:

一、 *f*(*x*)=*Pm*(*x*)*eλx*型

(1)如果*λ*不是特征方程*r*2+*pr*+*q*=0 的根, 设特解：

*y*\*=*Qm*(*x*)*eλx*.

(2)如果*λ*是特征方程 *r*2+*pr*+*q*=0 的单根,

:

设特解 ：

*y*\*=*xQ*m(*x*)*eλx*.

(3)如果*λ*是特征方程 *r*2+*pr*+*q*=0的二重根,设特解：

*y*\*=*x*2*Qm*(*x*)*eλx*.

综上所述, 我们有如下结论: 如果*f*(*x*)=*Pm*(*x*)*eλx*, 则二阶常系数非齐次线性微分方程*y*′′+*py*′+*qy* =*f*(*x*)有形如

*y*\*=*xk**Qm*(*x*)*eλx*

的特解, 其中*Qm*(*x*)是与*Pm*(*x*)同次的多项式, 而*k* 按*λ*不是特征方程的根、是特征方程的单根或是特征方程的的重根依次取为0、1或2.

例1 求微分方程*y*′′−2*y*′−3*y*=3*x*+1的一个特解.

解 这是二阶常系数非齐次线性微分方程, 且函数*f*(*x*)是*Pm*(*x*)*eλx*型(其中*Pm*(*x*)=3*x*+1, *λ*=0).

与所给方程对应的齐次方程为

*y*′′−2*y*′−3*y*=0,

它的特征方程为

*r*2−2*r*−3=0.

由于这里*λ*=0不是特征方程的根, 所以应设特解为

*y*\*=*b*0*x*+*b*1.

把它代入所给方程, 得

−3*b*0*x*−2*b*0−3*b*1=3*x*+1,

比较两端*x*同次幂的系数, 得

, −3*b*0=3, −2*b*0−3*b*1=1.

由此求得*b*0=−1, . 于是求得所给方程的一个特解为

.

例2 求微分方程*y*′′−5*y*′+6*y*=*xe*2*x*的通解.

解 所给方程是二阶常系数非齐次线性微分方程, 且*f*(*x*)是*Pm*(*x*)*eλx*型(其中*Pm*(*x*)=*x*, *λ*=2).

与所给方程对应的齐次方程为

*y*′′−5*y*′+6*y*=0,

它的特征方程为

*r*2−5*r*+6=0.

特征方程有两个实根*r*1=2, *r*2=3. 于是所给方程对应的齐次方程的通解为

*Y*=*C*1*e*2*x*+*C*2*e*3*x*.

由于*λ*=2是特征方程的单根, 所以应设方程的特解为

*y*\*=*x*(*b*0*x*+*b*1)*e*2*x*.

把它代入所给方程, 得

−2*b*0*x*+2*b*0−*b*1=*x*.

比较两端*x*同次幂的系数, 得

, −2*b*0=1, 2*b*0−*b*1=0.

由此求得, *b*1=−1. 于是求得所给方程的一个特解为

.

从而所给方程的通解为

.

提示:

*y*\*=*x*(*b*0*x*+*b*1)*e*2*x*=(*b*0*x*2+*b*1*x*)*e*2*x*,

[(*b*0*x*2+*b*1*x*)*e*2*x*]′=[(2*b*0*x*+*b*1)+(*b*0*x*2+*b*1*x*)⋅2]*e*2*x*,

[(*b*0*x*2+*b*1*x*)*e*2*x*]′′=[2*b*0+2(2*b*0*x*+*b*1)⋅2+(*b*0*x*2+*b*1*x*)⋅22]*e*2*x*.

*y*\*′′−5*y*\*′+6*y*\*=[(*b*0*x*2+*b*1*x*)*e*2*x*]′′−5[(*b*0*x*2+*b*1*x*)*e*2*x*]′+6[(*b*0*x*2+*b*1*x*)*e*2*x*]

=[2*b*0+2(2*b*0*x*+*b*1)⋅2+(*b*0*x*2+*b*1*x*)⋅22]*e*2*x*−5[(2*b*0*x*+*b*1)+(*b*0*x*2+*b*1*x*)⋅2]*e*2*x*+6(*b*0*x*2+*b*1*x*)*e*2*x*

=[2*b*0+4(2*b*0*x*+*b*1)−5(2*b*0*x*+*b*1)]*e*2*x*=[−2*b*0*x*+2*b*0−*b*1]*e*2*x*.

本章单元测验题

一、选择题

1、下列微分方程中为一阶线性微分方程的是 [ A ]

A、

B、

C、

D、

2、微分方程的阶数为[ B ]

A、

B、

C、

D、

3、下列微分方程中为二阶微分方程的是 [ C ]

A、

B、

C、

D、

4、微分方程的特解形式是 [ B ]

A、

B、

C、

D、

5、微分方程的特解形式是 [ C ]

A、

B、

C、

D、

6、微分方程的特解形式是 [ C ]

A、

B、

C、

D、

7、微分方程的特解形式是 [ D ]

A、

B、

C、

D、

8、微分方程的特解形式是[ B ]

A、

B、

C、

D、

二、填空题

1、微分方程的通解为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

2、微分方程的通解是 。

3、微分方程的通解是\_\_\_\_\_\_\_ \_\_ \_\_\_.

4、微分方程的通解为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

5、微分方程的通解是

三、求解下列各题：

1、求可分离变量微分方程的通解.

2、求微分方程的通解并求的一个特解.

3、求可分离变量微分方程的通解及满足初始条件的特解．

4、求一阶线性微分方程的通解.

5、求可分离变量微分方程的通解及满足初始条件的特解．

6、求可分离变量微分方程的通解及满足初始条件的特解．

7、求微分方程的通解.

8、求可分离变量微分方程的通解.

9、

10、

11、